线性代数的发展及其应用

代数学是数学一个古老和重要的分支，历史悠久。线性代数又是代数学中一个应用广泛和重要的分支，现简要叙述其形成、历史发展和一些简单应用。

一、代数学的形成和发展历史

从代数学的发展历史看，大体上分为三个时期。而在这三个时期中，人们将三个很不相同的东西都理解为代数学，也就是说这三个时期中说的代数学有很大差异。因此也就很难给“什么是代数学”下一个统一的定义。下面我们从三个不同时期的内容来了解代数学，了解代数学的形成和发展历史。

1. 第一个时期

这一时期大约从古代一直到十七世纪的样子。在九世纪时，中亚地区(约 783－850)，他在公元 820 年写了一本书，其阿拉伯书名为“ilm al-Jabr wal Mugabalah”。 al-Jabr 意为“整理”－ －即把负项移到方程另一边变成正项；Mugabalah 意为“对消”或“化简”－－即指方程两边也可消去相同项或合并同类项。因此，该书若直译应为“整理与对消的科学”。在 12 世纪该书译成拉丁文时书名为《Ludus algebrae et almugraba eque》.后来简称为 Algebra。这样，Algebra 作为代数学的名称，从那时起在欧洲一些国家使用。在我国，最早把 Algebra 音译为“阿尔热巴拉”，到 1859 年清数学家李善兰棣么根(A.deMorgan)的书《Elements of Algebra》才正式把 Algebra 定名为“代数学”，一直沿用至今。花拉子米的《代数学》内容由三部分组成：①讲述现代意义下的初等代数，其中有特殊的数学方程及解法，代数式的运算等；②讨论各种实用算术问题；③列举大量有关继承遗产的应用问题。

《代数学》传入欧洲后，对欧洲数学的代数产生了重大影响。应该指出，公元一世纪编著而在公元 263 年又被我国数学家刘微的注译《九章算术》中就已经有一元二次方程，到七世纪，中国已能解三次、四次方程的正根，十一世纪能求数学系数高次方程的近似根，即秦九鞘方法。中国在代数学上的辉煌成就，可以说是当时世界上最先进的代数学。

在古代，为了解决某些数学问题而找到的定理和法则都是用语言把它写下，因为那时字母表示法还没有发明，后来渐渐意识到字母表示数的重大意义，即不仅用字母表示未知数，也用字母表示已知数和给定量。这样一来，就使得代数学中一个定理和法则描述和表达极其明确和简洁，这对于代数学的发展产生重大影响，是数学史上一个划时代的伟大事件。从此开始，人们把代数学实际看成是关于字母计算、关于由字母所构成的公式的变换和代数方程的科学。它与算术的不同在于算术永远是对具体数字的运算，仅仅从这以后，甚至很复杂的数学法都易于观察和了解。在用字母代表数的变迁中作出贡献的首推韦达，而笛卡尔对此也作了不少工作。这一时期代数学的另一特点是整个数学，无论是几何学还是无穷小分析，都叫做代数学。这特别明显表现在十七世纪欧拉所著的有名的《代数学引论》一书中，他当时把代数学定义为各种量的计算的理论，他的书包含有：整数、分数、二、三次方根计算、对数、级数、多项式的计算、二项式定理及应用、线性方程组理论、一二三四次方程解法以及

整数不定方程解法等等。一般二次方程的求根公式最早出现在花拉子米的《代数学》一书中，这是花拉子米的最重要的贡献。一直到十六世纪，三、四次方程的求根公式相继被意大利数学家菲洛、塔尔塔里亚和费拉里(1522－1565)所找到。

2. 第二个时期

在十八世纪和十九世纪初，代数学的问题之一，即代数方程的解法被认为是中心问题。因为在十六世纪意大利数学家在求得三、四次方程的一般解法后，人们就全国来求五次或五次以上一般方程的代数解法，当时一些最伟大的数学家如卡丹、笛卡儿、牛顿、欧拉、达朗贝尔、拉各朗日、高斯、阿贝尔、伽罗华以及斯图母等等，创造了与这个问题有关的大规模的复杂理论。如高斯在 1799 年证明了有名的代数学基本定理，笛卡儿特别是斯图母于 1835 年给出了关于实根个数的判定法，等等，对代数学的发展产生重要影响。但是，虽然经过大多数数学家的顽强努力，而用根号解高于四次方程的问题仍悬而未决。当 1824 年一个年青的有天才的挪威数学家阿贝尔(1802－1829)的著作出版时，使当时所以数学家都大为惊奇，他证明了如果方程的次数大于等于 5，且系数看出字母，那么任何一个由这些系数组成的根式都不可能是该方程的根。原来一切国家的最伟大的数学家三个世纪以来用根号解五次或更高次的方程，之所以不能获得成就，只因为这个问题根本就没有解。但是，这并不是问题的全部，代数、方程理论的最关键之处仍留在 面，阿贝尔只是证明了一般的五次或五次以上的方程不能用根号解，但并不排除特殊的方程可用根号解。于是关于用根号解方程的问题又在新的基础上提出来了：一个方程究竟可用根号解的充分必要条件是什么？这个问题于 1830 年竟被一个不满 20 岁的法国青年数学家伽罗华(Calios 1811-1832)所彻底解决。他的工作是开创性的，他在方程解方面的卓越成就现在已发展成数学中一个新的分支－－群论，它广泛应用于数学、物理、化学等学科中去。

在十九世纪中叶，即欧拉的《代数学引论》出版一百年的时候，谢尔的两卷《代数学》问世了，该书把代数定义为代数方程理论的科学，书中第一次序数了代数方程理论的顶峰－－伽罗华理论。在这一时期，作为与代数方程解法相关联的行列式与矩阵的理论，二次型及线性变换等线性代数理论也发展起来了。

3. 第三个时期

随着数学特别是代数学的发展，使人们逐渐认识到，我们遇到的许多研究对象如多项式、矩阵和线性变换、函数以及力、向量等等，虽然它们都不是数，但也类似与数那样遵循一定的运算规则进行运算。从这样一个觉悟出发，于是近一百年特别是本世纪以来代数学的研究对象和研究方法发生了巨大变革。一系列新的代数领域被建立起来，大大地扩充了代数学的研究范围，形成了所谓的近世代数学，它与以代数方程的根的计算与分布为研究中心的古典代数学有所不同，它是研究数字、文字和更一般元素代数运算的规律以及各种代数结构的性质为其中问题的。由于代数运算贯穿在任何数学理论和应用问题里，也由于代数结构及其中元素的一般性，近世代数学的研究在数学中是最具有基本性的，它的方法和结果渗透到那些

与它相接近的各个不同的数学分支中，成为一些有着新面貌和新内容的数学领域——代数数论、代数几何、拓扑代数、李氏代数、代数拓扑、泛函分析等，这样，近世代数学就对于全部现代数学发展有着显著的影响，并且对于其它一些科学领域如理论物理、计算机原理等也有较直接的应用。

历史上，近世代数学可以说是从19世纪之初发生的，Galois应用群的概念对于高次方程是否可以用根号解给出彻底回答，他可以说是近世代数学的创始人。从那时起，近世代数学由萌芽而成长发达，大概由十九世纪开始，群以及相联系的不变量概念在几何上、分析上以及理论物理上，都发生了重要影响。后来环、理想、域、线性空间代数、模以及同调代数等等，形成了代数学中的诸多重要分支。自1920年起，以Noether 和Artin和他的学生们为中心，近世代数学的发展极为灿烂。

二、线性代数的形成和发展历史

在代数学发展的第二个时期，即在19世纪时，线性代数就获得了光辉的成就。

线性代数内容广泛，而行列式、矩阵、线性方程组等只是线性代数的初等部分，线性代数还有更深入的内容，如线性空间、欧式空间、酉空间、线性变换和线性函数、λ－矩阵、矩阵的特征值等等以及与其相关联的一系列理论。有材料说，在代数学的所有分支中，线性代数的这些理论按其应用的重要性和广泛性来说，是第一位的，很难指出数学、理论力学、理论物理等学科中有不用到线性代数的结果和方法的。例如，线性代数对于泛函分析的发展就有着决定性的影响。下面着重对线性代数的初等部分的形成和发展简述如下：

1．行列式

最早引入行列式概念的，是十七世纪的日本的数学奠基人关孝和。他1383年著《解优题之法》一书，对行列式及其展已经有了清楚的叙述。但是在公元一世纪(东汉初年)。中国古算术《九章算术》中已有用矩阵(当时称为“方程”)的初等变换来解线性方程组的内容了。关孝和的思想的产生，大概多受惠于中国而非西方的影响。

1693 年，莱不尼兹用指标数的子统集合表示含两个未知量和三个线性方程组所组成的系统，他从三个方程的系数中消去两个未知量，得到一个行列式，就是现在所称的方程组的法式。

用行列式去解含二、三、四个未知量的方程组，可能在1729年由马克劳林所首创，且于1748年发表在他的遗作《代数绝著》中，其法则基本就是现在所使用的法则。瑞士数学家克莱姆(Cramer)于1750年把马克劳林的法则发表在他的《线性代数分析导言》中，这就是现在所谓的克莱姆法则。

1772年，范德蒙(Vander monde)把行列式脱离开线性方程组作为一个独立的理论研究。给出行列式的定义与确立符号的法则，被认为是行列式理论的奠基人。

1812 年，柯西(Cauchy)首先采取“行列式”(Determinant)这一名称。他还于 1815 年把行列式的元素记为 a_{ij}，带双重足码。他的著作给出行列式第一个系统的也几乎是近代的

处理，其中一个主要结果之一是行列式的乘法规则。

1825 年，叔尔克，叙述并说明了行列式的一些性质。

1841 年，英国数学家凯莱引入了行列式的两条竖线。同年，德国数学家雅各比(Jacobi)著名论文《论行列式的形成与性质》发表，这标志着行列式系统理论的建成。

2．矩阵和线性方程组

在行列式理论形成与发展的同时，矩阵理论以及与其有密切关系的线性方程组、线性空间的线性变换等理论也蓬勃得发展起来了。十九世纪，已经发现了用初等变换解线性方程组的高斯法。

1849 年，凯莱已经给出可逆方阵作成乘群的结论。

1850 年，英数学家希尔维斯特(Sylevester)首先使用“矩阵”(Matrix)这个词。此后，矩阵理论得到迅速发展，主要原因是由于有了行列式的成果作基础。对此作出重大贡献的是希尔维斯特和凯莱，矩阵的很多开创性工作都是他做出的。他希尔维斯特 1858 年发表了重要文章《矩阵的研究报告》，其中定义了矩阵的相等、零矩阵、单位矩阵、矩阵运算、性质、逆矩阵、转置矩阵性质以及特征矩阵和特种根等。1870 年，法约当(Jordan)给出矩阵的相似型，即现在线性代数中所说的约当标准型。

1879 年，德著名数学家佛洛宾纽斯(1849－1917)引进了矩阵的秩的概念。他还普遍证明了 Hamilton-Cayley 定理，提出了最小多项式的概念并研究了正交矩阵、λ－矩阵的不变因子和初等因子的理论。此后对行列式和矩阵的发展作出贡献的数学家还有 Kronecher、Dodgson 和 Hadaward 等人。

三、线性代数的一些简单应用

前面提到，线性代数广泛应用于数学的各个分支以及物理、化学和科学技术中。如：线性代数在“人口模型”、“马尔可夫链”、“投入产出数学模型”、“图的邻接矩阵”等方面有着广泛的应用。其中行列式已广泛应用于线性方程组和矩阵理论中，这一点是很清楚的。下面只举例说明矩阵和线性方程组的一些应用。线性方程组和二次型中的应用。大家知道，最重要的线性方程组基本定理(Kronecher－CApelli):一个线性方程组有解等于其系数矩阵和增广矩阵有相同的秩。完全体现在矩阵及其秩上。可以说矩阵及其秩的理论贯穿于线性方程组讨论的始终。矩阵函数在微分方程组中有重要应用；矩阵理论在试验设计中有重要应用，其中特别要用到一些特殊的矩阵，如 Hadamard 矩阵和正交方阵。线性方程组在气象预报中的应用。为了做天气和气象预报，有时往往根据诸多因素最后归结为解一个线性方程组。当然，这种线性方程组在求解时不能手算，而要在电子计算机上进行。线性方程组在国民经济中的应用。为了预测经济形势，利用投入产出经济数学模型，也往往归结为求解一个线性方程组