《线性代数》模拟试卷参考解答

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. D　2. B　3. C　4. D　5. B

6. B　7. A　8. C　9. D　10. D

二、（8 分）

解

$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\dots&0&0\\1&2&1&\dots&0&0\\0&1&2&\dots&0&0\\&\dots&&\dots&&\\0&0&0&\dots&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_{i+1}-\frac{i}{i+1}r_i}\begin{vmatrix}2&1&0&\dots&0&0\\0&3/2&1&\dots&0&0\\0&0&4/3&\dots&0&0\\&\dots&&\dots&&\\0&0&0&\dots&0&n+1/n\end{vmatrix}(i=1,2\dots,n-1)$$

$$=2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\dots\times\frac{n+1}{n}\quad=n+1.$$

三、（9 分）

解：由方程变形得　　$(\mathrm{A}-2\mathrm{E})\mathrm{X}=\mathrm{A}$

若 $(\mathrm{A}-2\mathrm{E})$ 可逆，则　　$\mathrm{X}=(\mathrm{A}-2\mathrm{E})^{-1}\mathrm{A}$

因为

$$(\mathrm{A}-2\mathrm{E},\mathrm{A})=\begin{bmatrix}2&2&3&4&2&3\\1&-1&0&1&1&0\\-1&2&1&-1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&1&1&0\\2&2&3&4&2&3\\-1&2&1&-1&2&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&4&3&2&0&3\\0&1&1&0&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4}r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&3/4&1/2&0&3/4\\0&1&1&0&3&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&3/4&1/2&0&3/4\\0&0&1/4&-1/2&3&9/4\end{bmatrix}\xrightarrow{4r_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&3/4&1/2&0&3/4\\0&0&1&-2&12&9\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{3}{4}r_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&0&2&-9&-6\\0&0&1&-2&12&9\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&3&-8&-6\\0&1&0&2&-9&-6\\0&0&1&-2&12&9\end{bmatrix}$$

所以，$(\mathrm{A}-2\mathrm{E})$ 可逆，且 $\mathrm{X}=\begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

四、（7 分）

解　记 $\mathrm{A}=(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_4,\partial_5)$

对矩阵 A 施行初等行变换：

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4\div(-2) \\ r_3\leftrightarrow r_4}]{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\div 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从上面 A 的行最简形可知，$\partial_1,\partial_2,\partial_3$ 是 A 的列向量组的一个最大线性无关组，且

$$\partial_4=\partial_1+3\partial_2-\partial_3 \quad .$$

五、　（9 分）

解　对增广矩阵 B 作初等行变换

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div(-4)]{r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

即得 $\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4} \\ x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4} \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases}$

亦即 $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3/4 \\ 7/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (c_1, c_2 \in R)$$

六、（6 分）

解：因为 A 与 B 相似，知 A 的特征值为 5，y, −4. 由特征值的性质，易得

$$5+(-4)+y=2+x \qquad （\mathrm{I}）$$

而 $\lambda=-4$ 为 A 的特征值，有 $|\mathrm{A}+4\mathrm{E}|=0$

即 $$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -9 & 0 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -4 & x+4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 9(x-4) = 0$$

得 $x=4$ ，再代入（I）式得 $y=5$.

七、（10 分）

解 先求特征值：

$$|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$.

对应 $\lambda_1=-2$，解方程组 $(\mathrm{A}+2\mathrm{E})x=0$，由

$$(\mathrm{A}+2\mathrm{E}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得单位特征向量 $p_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$；

对应于 $\lambda_2=1$，解方程组 $(\mathrm{A}-\mathrm{E})x=0$，由

$$(\mathrm{A}-\mathrm{E})=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得单位特征向量 $p_2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$；

对应于 $\lambda_3=4$，解方程组 $(\mathrm{A}-4\mathrm{E})x=0$，得单位特征向量 $p_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$.

由以上过程，知 $p=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 为正交矩阵，使得 $p^{-1}\mathrm{A}p=\Lambda$.

八、（21 分）

1. 证明：由于 $\mathrm{A}^2=\mathrm{E}$，于是

$$(\mathrm{E}-2\mathrm{A})(\mathrm{E}-2\mathrm{A})=\mathrm{E}-4\mathrm{A}+4\mathrm{A}^2=\mathrm{E}$$

从而，$(\mathrm{E}-2\mathrm{A})$ 可逆，且 $(\mathrm{E}-2\mathrm{A})^{-1}=(\mathrm{E}-2\mathrm{A})$

2. 证明：因为 $\mathrm{AA}^T=\mathrm{E}$，$\mathrm{BB}^T=\mathrm{E}$，

所以，$(\mathrm{AB})(\mathrm{AB})^T=(\mathrm{AB})(\mathrm{B}^T\mathrm{A}^T)=\mathrm{A}(\mathrm{BB}^T)\mathrm{A}^T=\mathrm{AA}^T=\mathrm{E}$

由定义，可知 AB 为正交矩阵.

3. 证明：因为 $\mathrm{AA}^*=|\mathrm{A}|\mathrm{E}$

（I） 当 $|\mathrm{A}|=0$，$\mathrm{AA}^*=0$. 反设 $|\mathrm{A}^*|\neq 0$，则知 A^* 可逆，于是在等式 $\mathrm{AA}^*=O$ 左右两边同时右乘 $\left(\mathrm{A}^*\right)^{-1}$，得到 $\mathrm{A}=O$，于是 $\mathrm{A}^*=O$，这与假设矛盾。可知当 $|\mathrm{A}|=0$ 时，$|\mathrm{A}^*|=0=|\mathrm{A}|^{n-1}$；

（II） 当 $|\mathrm{A}|\neq 0$ 时，在等式 $\mathrm{AA}^*=|\mathrm{A}|\mathrm{E}$ 两边同时取行列式，得

$$|\mathrm{A}||\mathrm{A}^*|=|\mathrm{AA}^*|=||\mathrm{A}|\mathrm{E}|=|\mathrm{A}|^n$$

两边同时约去 $|\mathrm{A}|$，得 $|\mathrm{A}^*|=|\mathrm{A}|^{n-1}$.

综合(I),(II),知 $|\mathrm{A}^*|=|\mathrm{A}|^{n-1}$.