线性代数 (Linear Algebra)

总学时数: 40

参考书目：

［1］郝志峰. 线性代数. 复旦大学出版社，2015.12

［2］陈怡. 线性代数. 中国铁道出版社，2013.2

［3］同济大学数学系. 线性代数附册-学习辅导与习题全解. 高等教育出版社，2018.1

［4］吴传生. 线性代数学习辅导与习题选解. 高等教育出版社，2013.9

引言（Introduction）

随着科学的发展，不仅要研究单个变量之间的关系，还需进一步研究多个变量之间的关系。实际中，许多问题在大多数情况下可以线性化，也就是“以直代曲”，因为线性比较容易处理。特别是，由于计算机的快速发展，线性化的问题可借用计算机解决。因此，线性代数应用越来越广泛，在数学、物理学、化学等学科和工程技术以及国民经济的许多领域都有着广泛的应用。如计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术也都以线性代数为其理论和算法为基础。

线性代数所体现的几何观念与代数方法之间的联系，从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合等，对于强化人们的数学训练，增益科学智能是非常有用的。是从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础，成为高等院校很多专业的必修课。

第1章　行列式

第1节　二阶与三阶行列式

第2节　全排列与对换

第3节　n 阶行列式

第4节　行列式的性质

第5节　行列式的按行（列）展开

第1节 二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

二、三阶行列式

三、小结

引例:

解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

用消元法

$(1)\times a_{22}$: $a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$

$(2)\times a_{12}$: $a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$

两式相减，消去x_2，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$

同理，消去x_1，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

由方程组的四个系数确定.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases} \qquad \begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}$$

定义 由四个数排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{4}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表（4）所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{5}$$

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式的计算 ——对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

系数行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \boxed{b_1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \boxed{b_2.} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \boxed{b_1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \boxed{b_2.} \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

克莱姆法则

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

二、三阶行列式

定义1 设有9个数排成 3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{6}$$

（6）式称为数表（5）所确定的**三阶行列式**.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

列标

行标

三阶行列式的计算

(1) 对角线法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

注1　红线上三元素的乘积冠以正号，蓝线上三元素的乘积冠以负号.

例 2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解法1 按对角线法，有

$$D = 1\times 2\times(-2) + 2\times 1\times(-3) + (-4)\times(-2)\times 4$$
$$-1\times 1\times 4 - 2\times(-2)\times(-2) - (-4)\times 2\times(-3)$$
$$= -4 - 6 + 32 - 4 - 8 - 24$$
$$= -14.$$

(2) 沙路法 $D=\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \end{array}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

注2 对角线法、沙路法只适用于二阶与三阶行列式的计算。

三、小结

二阶和三阶行列式是由解二元和三元线性方程组引入的.

二阶与三阶行列式的计算 ——对角线法则

沙路法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$