第2节 全排列与对换

一、全排列与逆序数

二、对换

三、小结

一、逆序数

定义 1　由 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列（也叫做这 n 个元素的一个全排列）.

如：31245 是一个 5 级排列.

例1　写出所有的 3 级排列

123　132　213　231　312　321

3 级排列：

第一个位置有 3 种选择，第二个位置有 2 种选择，第三个位置有 1 种选择，所以所有的 3 级排列一共有

$$3\times2\times1=3!=6$$

个. 显然，所有的 5 级排列一共有 5！ = 120 个.

容易得出，n 级排列一共有 $n!$ 个。而在 n 级排列中，1 2 3 … n 这个排列具有自然顺序，称为一个自然排列或标准排列。

定义 2 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小次序相反，即前面的数比后面的数大，就称它们构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**.

例如： 排列 2 4 3 1 中，21，41，31，43 均为逆序，则排列的逆序数为4.

定义 3 逆序数是奇数的排列称为**奇排列**；逆序数是偶数或 0 的排列称为**偶排列**.

例如： 2 4 3 1 是偶排列；3 1 4 2 5 中有 3 个逆序，是奇排列.

逆序数的求法为：

在一个 n 级排列中，依次考虑每个数后面比它小的数有几个，如第 i 个元素后比它小的数有 t_i 个，则此排列的逆序数为

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} t_i$$

例2　求 3 5 4 2 1 的逆序数。

解　3 之后比 3 小的有 2 个，5 之后比 5 小的有 3 个，4 之后比 4 小的有 2 个，2 之后比 2 小的有 1 个，于是逆序数为

$$t = 2 + 3 + 2 + 1 = 8$$

二、对换与排列

定义 4　把一个排列中的某两个元素位置对调，而其它的元素不动，就得到了另一个排列，这种变换就称为一个对换.

例如：排列 3 5 4 2 1 中的 5 与 2 对换，就得到新排列 3 2 4 5 1.

定理 1　任何一个排列经过一次对换，排列改变奇偶性.即奇排列经过一次对换变成偶排列，偶排列经过一次对换变成奇排列.

例如：2 4 3 1（逆序数为 4，偶排列）

$\longrightarrow$ 2 1 3 4（逆序数为 1，奇排列）

定理 2 全部 n 级排列中，偶排列与奇排列各占一半，都是 $\frac{n!}{2}$（$n \geq 2$）个.

如果全部 n 级排列中奇排列有 p 个，偶排列有 q 个，所有的排列都经过一次同样的对换（对换相同的两个数），则奇排列变成了偶排列（即 $p \geq q$），偶排列变成了奇排列（即 $q \geq p$），所以 $p = q$.

定理 3 任何一个 n 级排列都可以经过 k 次对换变成一个标准排列，且 k 的奇偶性与原排列相同.（k 不唯一，但奇偶性不变）

三、小结

1. 对换, 逆序数的概念及计算

2. 排列的概念与性质