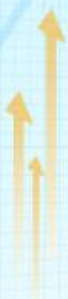


## 第2节 全排列与对换

一、全排列与逆序数

二、对换

三、小结



## 一、逆序数

**定义 1** 由  $1, 2, \dots, n$  组成的一个有序数组称为一个  $n$  级排列（也叫做这  $n$  个元素的一个全排列）。

如：31245 是一个 5 级排列。

**例 1** 写出所有的 3 级排列

123    132    213    231    312    321

### 3 级排列:

第一个位置有 3 种选择, 第二个位置有 2 种选择, 第三个位置有 1 种选择, 所以所有的 3 级排列一共有

$$3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$$

个. 显然, 所有的 5 级排列一共有  $5! = 120$  个.

容易得出,  $n$  级排列一共有  $n!$  个。而在  $n$  级排列中,  $1\ 2\ 3\ \dots\ n$  这个排列具有自然顺序, 称为一个自然排列或标准排列。

**定义 2** 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小次序相反，即前面的数比后面的数大，就称它们构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**.

**例如：**排列  $2\ 4\ 3\ 1$  中， $21$ ， $41$ ， $31$ ， $43$  均为逆序，则排列的逆序数为4.

**定义 3** 逆序数是奇数的排列称为**奇排列**；逆序数是偶数或  $0$  的排列称为**偶排列**.

**例如：** $2\ 4\ 3\ 1$  是偶排列； $3\ 1\ 4\ 2\ 5$  中有  $3$  个逆序，是奇排列.

## 逆序数的求法为：

在一个  $n$  级排列中，依次考虑每个数后面比它小的数有几个，如第  $i$  个元素后比它小的数有  $t_i$  个，则此排列的逆序数为

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} t_i$$

**例2** 求 3 5 4 2 1 的逆序数。

**解** 3 之后比 3 小的有 2 个，5 之后比 5 小的有 3 个，4 之后比 4 小的有 2 个，2 之后比 2 小的有 1 个，于是逆序数为

$$t = 2 + 3 + 2 + 1 = 8$$

## 二、对换与排列

**定义 4** 把一个排列中的某两个元素位置对调，而其它的元素不动，就得到了另一个排列，这种变换就称为一个对换。

**例如：**排列  $3\ 5\ 4\ 2\ 1$  中的  $5$  与  $2$  对换，就得到新排列  $3\ 2\ 4\ 5\ 1$ 。

**定理 1** 任何一个排列经过一次对换，排列改变奇偶性.即奇排列经过一次对换变成偶排列，偶排列经过一次对换变成奇排列。

**例如：**  $2\ 4\ 3\ 1$  (逆序数为 4, 偶排列)

$\longrightarrow$   $2\ 1\ 3\ 4$  (逆序数为 1, 奇排列)

**定理 2** 全部  $n$  级排列中，偶排列与奇排列各占一半，都是  $\frac{n!}{2}$  ( $n \geq 2$ ) 个。

如果全部  $n$  级排列中奇排列有  $p$  个，偶排列有  $q$  个，所有的排列都经过一次同样的对换（对换相同的两个数），则奇排列变成了偶排列（即  $p \geq q$ ），偶排列变成了奇排列（即  $q \geq p$ ），所以  $p = q$ 。

**定理 3** 任何一个  $n$  级排列都可以经过  $k$  次对换变成一个标准排列，且  $k$  的奇偶性与原排列相同。（ $k$  不唯一，但奇偶性不变）



## 三、小结

1. 对换, 逆序数的概念及计算
2. 排列的概念与性质