第3节　n 阶行列式的定义

一、阶行列式的定义

二、小结

一、n 阶行列式的定义

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

说明:

（1）三阶行列式共有 6 项，即 3! 项。

（2）每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.

（3）每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列。

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标排列 3 1 2 的逆序数为

$$t(312)=1+1=2,$$ 偶排列 正号

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列 1 3 2 的逆序数为

$$t(132)=1+0=1,$$ 奇排列 负号

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

由此，可以推广到 n 阶行列式情形.

定义 由 n^2 个数组成的 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

记作
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1,2,$\cdots$，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和 .

几点说明:

1. 行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的；

2. n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和；

3. n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积；

4. $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$的符号为 $(-1)^t$.

5. 一阶行列式 $|a|=a$ 不要与绝对值相混淆；

例1 对角行列式

(1) $$D=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(2) $$D=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=?$$

解（2） 设 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$ ，则

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^t a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

其中 t 是排列 $n\ (n\text{-}1)\ (n\text{-}2) \ldots 3\ 2\ 1$ 的逆序数，所以

$$t = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

于是 $$D=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例3　计算上（下）三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\cdot 4\cdot 5\cdot 8=160.$$

即上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理，下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

二、小结

1. 行列式的定义

2. 行列式的特点

(1) 行列式是一种特定的算式;

(2) n 阶行列式共有 $n!$ 项，每项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积，正负号由下标排列的逆序数决定。