第4节　行列式的性质

一、性质

二、应用举例

三、小结

一、性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式。

性质1　行列式与它的转置行列式相等。

例如： $$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&3&5\\2&4&1\end{vmatrix}=3+20-18-20=-15$$

$$D^T=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&3&4\\3&5&1\end{vmatrix}=3+20-18-20=-15$$

注： 行列式中行与列具有同等的地位，因此行列式凡是对行（或列）成立的性质同样对列（或行）也成立.

性质2 互换行列式的两行（列），行列式变号。

如：
$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&3&5\\2&4&1\end{vmatrix}=3+20-18-20=-15$$

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零。

说明: 将行列式 D 中相同的两行互换，其形式不变，但根据性质2, 行列式变号，即 $D=-D$ ，所以 $D=0$ 。

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

如： $D_1=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2$ $D_2=\begin{vmatrix}5 & 10\\ 3 & 4\end{vmatrix}=20-30=-10=5D_1$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

共有 6 项， 每项都含有某一行当中的一个元素

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}k\,a_{22}a_{33}+a_{12}k\,a_{23}a_{31}+a_{13}k\,a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}k\,a_{22}a_{31}-a_{11}k\,a_{23}a_{32}-a_{12}k\,a_{21}a_{33}$$

$$=kD$$

性质 4　行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零。

例如： $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$

性质5 若一行列式的某一列（行）的元素都是两数之和, 如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6　把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1i}} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\times k$

$$\xlongequal{c_i + kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

二、举例

计算行列式常用方法：利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1 **计算** $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

解

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_1]{r_3+r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

例 2 计算 $D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

解 $D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} \xlongequal{r_1\div 6} 6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}} 6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix} = 48$

三、小结

1. 行列式的性质与推论

行列式中行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立。

2. 利用性质计算行列式

利用行列式的性质计算行列式，通常化为上三角或者下三角行列式，容易计算其结果。