第5节 行列式的按行（列）展开

一、余子式与代数余子式

二、按行（列）展开法则

三、小结

一、余子式与代数余子式

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

$$= a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{13}}$$

定义　在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。

记　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

注：行列式的每个元素分别 对应着一个余子式和一个代数余子式.

引理　一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零，那末这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D = a_{ij}A_{ij}$ 。

例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

引理　一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零，那末这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D = a_{ij}A_{ij}$ 。

例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + 0\,a_{23}a_{31} + 0\,a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - 0\,a_{21}a_{33} - 0\,a_{22}a_{31},$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例 1　计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

解法一:

$$D \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{r_4-2r_1}{\overset{r_3+r_1}{=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4+3r_2}{\overset{r_3+r_2}{=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_4-r_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解法二:

$$D \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{r_4-2r_1}{\overset{r_3+r_1}{=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=-(-1)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=4$$

二、行列式按行（列）展开法则

定理2　n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于行列式任意一行的元素与自身的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

同样，也等于行列式任意一列的元素与自身代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$

仅看　$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

右边的 n 个乘积中，对于任何一项 $a_{ik}A_{ik}$ 来说，A_{ik} 的展开式是行列式 D 中除去第 i 行第 k 列的所有的不同行不同列的元素乘积的代数和，共有 $(n-1)!$ 项，所以 $a_{ik}A_{ik}$ 就是行列式 D 的展开式中含有 a_{ik} 的 $(n-1)!$ 项。当 k 从 1 取到 n 时，正好是行列式 D 的展开式中的 $n!$ 项。

综合定理1、2，得到有关代数余子式的重要性质：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ D & (i=j)\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ D & (i=j)\end{cases}$$

例2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$$D \underline{\underline{\overset{c_1+(-2)c_3}{c_4+c_3}}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_2+r_1}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

利用行列式的展开定理，可以把行列式进行降阶计算，一般可以选择含零较多的行或列，再利用行列式的性质把选定的行或列化成只含一个非零元素，这样展开后就可以直接把高一阶的行列式变成了一个低一阶的行列式来计算。

例3　计算 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

解

$\times(-a)$

$$D=\begin{vmatrix} \boxed{a} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-ac_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1-ab & b & 1 & 0 \\ a & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = 1\cdot A_{12}$$

$$=-M_{12}=-\begin{vmatrix} -1-ab & 1 & 0 \\ a & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-dr_2} -\begin{vmatrix} -1-ab & 1 & 0 \\ a & c & 1 \\ -ad & -1-cd & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-A_{23}=M_{23}=\begin{vmatrix} -1-ab & 1 \\ -ad & -1-cd \end{vmatrix}=(1+ab)(1+cd)+ad$$

或者

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -d \end{vmatrix}$$

例4　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 2^2 & 4^2 & 7^2 & 9^2 \\ 2^3 & 4^3 & 7^3 & 9^3 \end{vmatrix}$ (4 阶 范德蒙行列式)

解　方法：　从第四行开始，后行减前行的2倍。

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 2^2 & 4^2 & 7^2 & 9^2 \\ 2^3 & 4^3 & 7^3 & 9^3 \end{vmatrix}$$

×（−2）

×（−2）

×（−2）

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&4&7&9\\2^2&4^2&7^2&9^2\\2^3&4^3&7^3&9^3\end{vmatrix}\begin{array}{l}\boxed{\times（-2）}\\\boxed{\times（-2）}\\\boxed{\times（-2）}\end{array}$$

$$\xlongequal[r_2-2r_1]{\substack{r_4-2r_3\\r_3-2r_2}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4-2&7-2&9-2\\0&4(4-2)&7(7-2)&9(9-2)\\0&4^2(4-2)&7^2(7-2)&9^2(9-2)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}4-2&7-2&9-2\\4(4-2)&7(7-2)&9(9-2)\\4^2(4-2)&7^2(7-2)&9^2(9-2)\end{vmatrix}$$

$$=(4-2)(7-2)(9-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 7 & 9\\ 4^2 & 7^2 & 9^2\end{vmatrix}$$

×（−4）

×（−4）

$$\xlongequal[r_2-4r_1]{r_3-4r_2}(4-2)(7-2)(9-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \boxed{7-4} & \boxed{9-4}\\ 0 & 7\boxed{(7-4)} & 9\boxed{(9-4)}\end{vmatrix}$$

$$=(4-2)(7-2)(9-2)(7-4)(9-4)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 7 & 9\end{vmatrix}$$

$$=(4-2)(7-2)(9-2)(7-4)(9-4)(9-7)=2100$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 2^2 & 4^2 & 7^2 & 9^2 \\ 2^3 & 4^3 & 7^3 & 9^3 \end{vmatrix}$$

$$=(4-2)(7-2)(9-2)(7-4)(9-4)(9-7)=2100$$

同理有 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$ 4 阶 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

对于一般的 n 阶范德蒙德(Vandermonde)行列式，有下面结果：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

注：证明时可采用数学归纳法。

三、小结

1. 行列式按行（列）展开法则是把高阶行列式的计算化为低阶行列式计算的重要工具。

2. $$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} D, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$