第2章　矩阵及其运算

第1节　矩阵的概念

第2节　矩阵的运算

第3节　逆矩阵

第5节　矩阵分块法

第1节　矩阵的概念

一、线性方程组

二、矩阵的定义

三、特殊矩阵

四、小结

一、线性方程组

n元线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

方程组的系数与常数项按原位置可排为:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}
$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究。

二、矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m行 n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 $m\times n$矩阵. 简称 $m\times n$ 矩阵.　记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的 (m,n)元

简记为 $A=A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$. a_{ij} 称为A的元素.

（1）元素是**实数**的矩阵称为**实矩阵**,

（2）元素是**复数**的矩阵称为**复矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵,

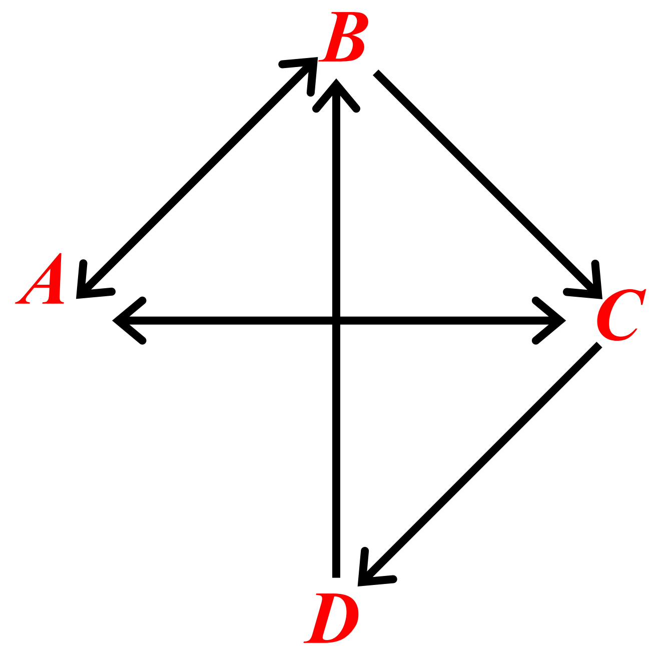
$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵,

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 是一个 1×1 矩阵.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是一个 3×1 矩阵, (4) 是一个 1×4 矩阵,

矩阵举例

例1　某航空公司在 A、B、C、D 四座城市之间开辟了若干航线，四座城市之间的航班图如图所示，箭头从始发地指向目的地.



城市间的航班图情况可用表格表示：

目的地

始发地	A	B	C	D
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

其中✓表示有航班

	A	B	C	D
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

为了便于用相关问题的研究，把表中的✓改成 1，空白地方填上 0 ，就得到一个数表:

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

$$\begin{array}{cc} & \text{目的地} \\ \text{始发地} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

这个矩阵反映了四个城市之间交通联接的情况.

例2　线性变换

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 线性变换，其中 a_{ij} 为常数.

从变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$到变量$y_1,y_2,\cdots,y_m$线性变换:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$$\cdots\cdots$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

例如 线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称为恒等变换.

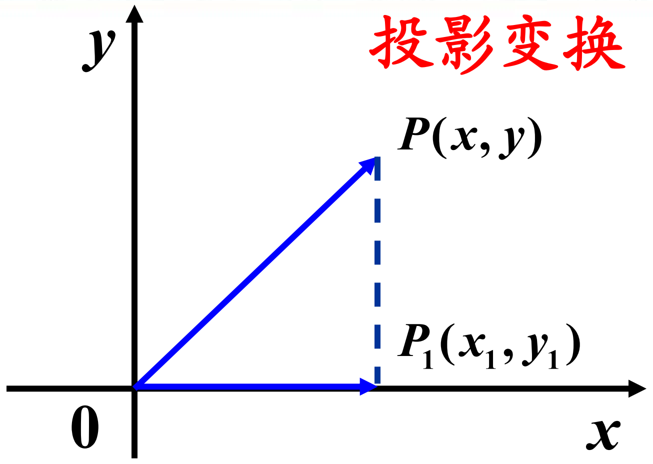
$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} = \begin{cases} y_1 = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ y_2 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 1\cdot x_n \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{单位阵 } E_n$$

例如 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

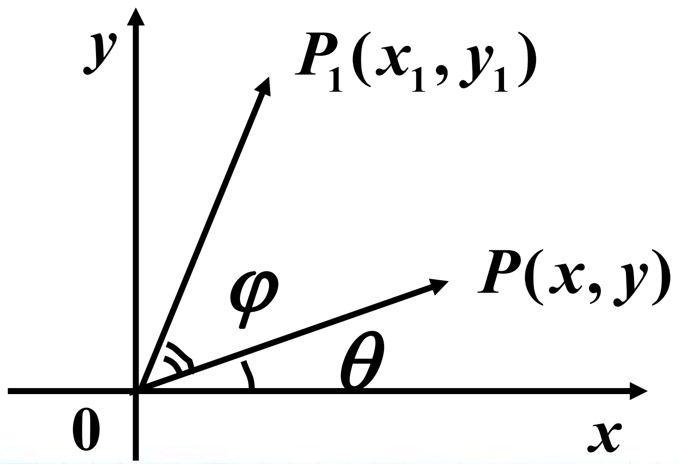
投影变换



例如 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = \cos\varphi x - \sin\varphi y, \\ y_1 = \sin\varphi x + \cos\varphi y. \end{cases}$$

以原点为中心逆时针旋转φ 角的旋转变换



三、特殊矩阵

（1）元素全为零的矩阵称为零矩阵，$m\times n$ 零矩阵记作 $o_{m\times n}$ 或 o.

注意 不同阶数的零矩阵是不相等的。

例如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

（2）只有一行的矩阵

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

称为行矩阵(或行向量)。

只有一列的矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

称为列矩阵(或列向量)。

（3）行数与列数都等于 n 的矩阵 A，称为 n 阶方阵，也可记作 A_n。

主对角线

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

副对角线

例如 $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3 阶方阵。

（4）三角方阵：非零元素只出现在主对角线及其上的方阵称为上三角方阵；非零元素只出现在主对角线及其下的方阵称为下三角方阵。

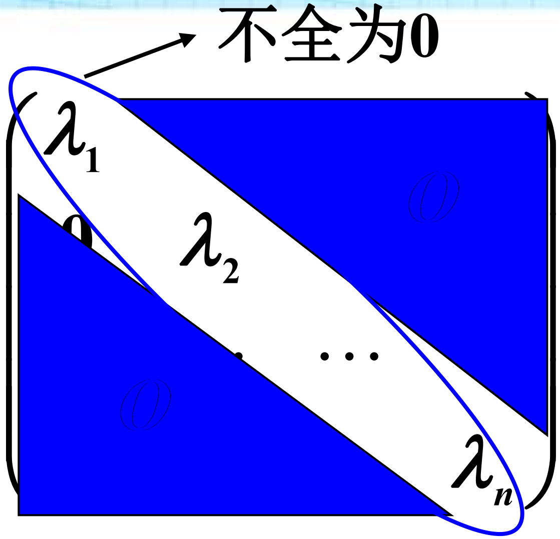
上三角方阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角方阵：

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

（5）形如



的方阵，称为对角矩阵（或对角阵）．

记作 $A = diag\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

（6）数量方阵：主对角线上是相同的非零元素，其余元素全为零的方阵称为数量方阵，即

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

（7）单位矩阵

方阵 $E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \cdots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$ 全为1

称为**单位矩阵**（或**单位阵**）。

（8）对称方阵：对于 n 阶方阵，如果 $a_{ij} = a_{ji}$，则称之为对称方阵，如：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -7 & 0 \\ 3 & -7 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

例3 天气的马尔可夫链：将某地区的天气状态分为3种：晴，阴和有雨。若今天阴，则明天晴的概率为0.5，阴的概率为0.25，有雨的概率为0.25。如果今天晴，或今天有雨，则明天天气会出现另外的概率。其概率一般能通过本地区以往几年天气变化的趋势数据确定，可用矩阵来表示，如：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{（今天）晴} & \text{阴} & \text{雨} \end{array} \quad \text{（明天）} \\ A = & \begin{pmatrix} 0.75 & 0.5 & 0.25 \\ 0.125 & 0.25 & 0.5 \\ 0.125 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{晴} \\ \text{阴} \\ \text{雨} \end{array} \end{array}$$

注： 矩阵中的概率称为转移概率，矩阵称为转移矩阵.

1. 两个矩阵的行数相等，列数相等时，称为同型矩阵。

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵。

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 为同型矩阵，并且对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

例4 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 1 & z\end{pmatrix},$$

已知 $A=B$,求 x, y, z.

解 $\because\ A=B,$

$\therefore x=2,\ \ y=3,\ \ z=2.$

四、小结

1. 矩阵的概念 —m行n列数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. 特殊矩阵

- 方阵　$(m = n)$;
- 行矩阵与列矩阵;
- 单位矩阵;
- 对角矩阵;
- 零矩阵;
- 三角方阵;
- 对称方阵;