第2节　矩阵的运算

一、矩阵的加法

二、数与矩阵相乘

三、矩阵与矩阵的相乘

四、矩阵的转置

五、方阵的行列式

六、小结

一、矩阵的加法

定义2 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，则矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注：只有当两个矩阵是同型矩阵时，方能进行加法运算。

例如

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. 矩阵加法的运算规律

$$(1)\ A+B=B+A;$$

$$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$$

$$(3)\ -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=\left(-a_{ij}\right),$$

称为矩阵A的**负矩阵**.

$$(4)\ A+(-A)=0,\ A-B=A+(-B).$$

例2 已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $A+B$ 和 $A-B$。

解

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+5 & -1+3 & 0+(-4) \\ 3+2 & -2+1 & 4+0 & 1+2 \\ -3+(-2) & 5+(-3) & 0+3 & -1+2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 4 & 3 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-5 & -1-3 & 0-(-4) \\ 3-2 & -2-1 & 4-0 & 1-2 \\ -3-(-2) & 5-(-3) & 0-3 & -1-2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

二、数与矩阵相乘

定义3 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵的运算规律

（设 A、B为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ为数）

$$(1)\ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A);$$

$$(2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$$

$$(3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$$

矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为矩阵的**线性运算**.

例3 甲乙两台车床生产种1、2、3三型号的螺丝，一天的产量可以用下面矩阵表示

$$A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1200 & 1500 & 300\\ 2000 & 500 & 1000\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{甲}\\ \text{乙}\end{array}\\ \begin{array}{ccc}\quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad\end{array} & \end{array}$$

如果要求产量提高 10%，则一天的产量为：

$$(1+10\%)A=1.1\begin{pmatrix}1200 & 1500 & 300\\ 2000 & 500 & 1000\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1320 & 1650 & 330\\ 2200 & 550 & 1100\end{pmatrix}$$

例4 已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

且 $A+2X=B$，求 X。

解 $X=\dfrac{1}{2}(B-A)$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

例5 假设某学校一学期内 3 门课程数学、语文、英语分别有3 次考试，每门课每次考试满分为100 分。现抽查评定甲、乙、丙、丁 4 位学生的各门课程总成绩，以学生为行，课程为列各构成3个考试成绩矩阵，即

$$S_1 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 76 & 80 & 70 \\ 82 & 78 & 90 \\ 68 & 88 & 94 \\ 90 & 98 & 86 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \\ \text{丁} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{数学} & \text{语文} & \text{英语} \end{array} \end{array} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 80 & 70 & 90 \\ 86 & 80 & 82 \\ 78 & 84 & 90 \\ 82 & 68 & 88 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 90 & 76 & 80 \\ 80 & 70 & 80 \\ 80 & 80 & 90 \\ 78 & 84 & 74 \end{pmatrix}$$

若每门课程总成绩是按加权计分评定，即前两次考试权重皆为 0.25，最后一次权重为 0.5，

则4位学生3课程的总成绩矩阵为

$$T = 0.25\begin{pmatrix} 76 & 80 & 70 \\ 82 & 78 & 90 \\ 68 & 88 & 94 \\ 90 & 98 & 86 \end{pmatrix} + 0.25\begin{pmatrix} 80 & 70 & 90 \\ 86 & 80 & 82 \\ 78 & 84 & 90 \\ 82 & 68 & 88 \end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix} 90 & 76 & 80 \\ 80 & 70 & 80 \\ 80 & 80 & 90 \\ 78 & 84 & 74 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 84 & 75.5 & 80 \\ 82 & 74.5 & 83 \\ 76.5 & 83 & 91 \\ 82 & 83.5 & 80.5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \\ \text{丁} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{数学} & \text{语文} & \text{英语} \end{array} \end{array}$$

知识点比较:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+b_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22}+b_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32}+b_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix}$$

二、矩阵与矩阵相乘法

定义4 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵， $B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，则规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是 $m\times n$ 一个矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m\,;\,j=1,2,\cdots,n)$$

并把此乘积记为 $C=AB$，即

$$A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}=\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}$$

由此定义，一个 $1\times s$ 的行矩阵与一个 $s\times 1$ 的列矩阵的乘积是一个一阶方阵，也就是一个数：

$$
\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i1} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}
$$

$$
= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}
$$

注意：

（1）只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时，两个矩阵才可以相乘；

（2）乘积矩阵的行数等于左矩阵的行数，列数等于右矩阵的列数；

（3）乘积矩阵的第 i 行第 j 列元素是左矩阵的第 i 行与右矩阵的第 j 列的对应元素的乘积之和。

例6 已知 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$，求 AB 及 BA。

解

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=0\times3+1\times4+2\times5=14$$

$$BA=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 6\\0 & 4 & 8\\0 & 5 & 10\end{pmatrix}$$

练习:

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

问题1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} ? \quad \text{不存在.}$$

问题2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = ?\begin{pmatrix} 1\times 3+2\times 2+3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}.$$

2. 矩阵乘法的运算规律

$(1)\ (AB)C = A(BC)$;

$(2)\ A(B+C) = AB + AC,\quad (B+C)A = BA + CA$;

$(3)\ \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）；

$(4)\ AE = EA = A$;

(5) 一般不满足交换律，即 $AB \neq BA$ 。

练习 已知 $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$，求 AB 及 BA.

解

$$AB=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

注：两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

由于两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵，所以矩阵的乘法一般不满足消去律：

即当 $AB = AC$ 且 $A \neq O$ 时，不一定有$B = C$。

如
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

而
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法一般不满足交换律，但也有例外．例如，设

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},$$

则有

$$\left.\begin{aligned}AB&=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\\BA&=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow AB=BA.$$

事实上，数量方阵与任何同阶方阵都是可交换的.

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

写成矩阵形式：$AX = B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$ 有意义.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$ 没有意义.

只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. 方阵的幂

利用矩阵的乘法，可以定义方阵的幂。

定义 设 A 为 n 阶方阵，k 为正整数，则 k 个 A 的连乘积称为方阵 A 的 k 次幂，记作 A^k，即

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{(k\text{个}A)}$$

方阵的幂满足下面运算律：

（1） $A^k A^l = A^{k+l}$

（2） $(A^k)^l = A^{kl}$

四、矩阵的转置

定义5 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T.

例如 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&8\end{pmatrix}$, $\quad A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}18&6\end{pmatrix}$, $\quad B^T=\begin{pmatrix}18\\6\end{pmatrix}$.

转置矩阵的运算性质:

$(1)\left(A^T\right)^T = A;$

$(2)\left(A+B\right)^T = A^T + B^T;$

$(3)\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T;$

$(4)\quad \left(AB\right)^T = B^T A^T.$

例7 已知

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{求}\ (AB)^T.$$

解法 1:

$$\because AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},$$

解法 2:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

注意：

（1）如果 A 是对称方阵，则 $A = A^T$.

（2）如果 $A^T = -A$，则 A 是反对称方阵.

五、方阵的行列式

定义6 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

例 $A=\begin{pmatrix}2&3\\6&8\end{pmatrix}$ 则 $|A|=\begin{vmatrix}2&3\\6&8\end{vmatrix}=-2.$

运算性质 (1) $\left|A^T\right|=|A|$; (2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$;

(3) $|AB|=|A||B|$; $\Rightarrow |AB|=|BA|.$

例8 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

证明 $|AB|=|A||B|$。

证

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & -6\end{pmatrix}$$

于是 $|AB|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & -6\end{vmatrix}=-20$

而 $|A|=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$　　$|B|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-10$

显然 $|AB|=|A||B|$

伴随矩阵：

行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为n阶矩阵 A 的伴随矩阵。

结论： $$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}_{n\times n} = |A|E_n$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

六、小结

矩阵的运算

- 矩阵与矩阵相加
- 数与矩阵相乘
- 矩阵与矩阵相乘
- 矩阵的转置
- 方阵的行列式