第3节 逆矩阵

一、逆矩阵的定义、性质和求法

二、逆矩阵的初步应用

三、小结

一、逆矩阵的定义、性质和求法

1. 逆矩阵的定义

引例 在数的运算中，当数 $a \neq 0$ 时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中$a^{-1} = \frac{1}{a}$为 a 的倒数，（或称 a 的逆）；

对于矩阵 A，如果存在一个矩阵 A^{-1}，使得

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

则矩阵A^{-1}称为 A 的逆矩阵或逆阵.

定义7 对于 n 阶方阵 A，如果有一个 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=E$，则说方阵 A 是可逆的，并把方阵 B 称为 A 的逆矩阵。

A的逆矩阵记作 A^{-1}.

例如 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$\because AB=BA=E, \quad \therefore B$是$A$的一个逆矩阵 .

几点说明：

（1）设 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是唯一的.

若 B 和 C 是 A 的可逆矩阵，则有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

可得 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$

所以 A 的逆矩阵是唯一的.

（2）逆阵是互逆的.

若 $AB = BA = E$，则 $A^{-1} = B, B^{-1} = A$.

例1 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求 A 的逆阵 .

解法一 待定元素法: 设 $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 是 A的逆矩阵,

则 $AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2a+c=1,\\ 2b+d=0,\\ -a=0,\\ -b=1,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0,\\ b=-1,\\ c=1,\\ d=2.\end{cases}$$ 所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

伴随矩阵： $$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

结论： $$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}_{n\times n} = |A|E_n$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

定理 矩阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

证明 “$\Rightarrow$” 若A可逆，即有A^{-1}使$AA^{-1}=E$.

（定理1）

故$|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1$，所以$|A|\neq 0$.

“$\Leftarrow$” 当$|A|\neq 0$时，因

$$AA^*=A^*A=|A|E \Rightarrow A\frac{A^*}{|A|}=\frac{A^*}{|A|}A=E,$$

（定理2）

按逆矩阵定义得 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$ 证毕.

推论 设A、B为同阶方阵，若 $AB = E$，

则 A和 B都可逆，且 $A^{-1} = B$，$B^{-1} = A$

证明： 若 $AB = E$，则$|AB| = |A||B| = 1$，故 $|A| \neq 0$，

即 A可逆，且 $B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}$

同理，B可逆，且 $A = B^{-1}$

2. 求逆矩阵举例

例2 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A 的逆阵 .

解法二 伴随矩阵法:

因 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ $\qquad A^{*}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

例3 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0\qquad \therefore\ A^{-1}$存在.

又 $A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$,

故 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}.$

实际应用案例:可逆矩阵在加密算法中的应用.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	…	x	y	z	空格
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…	24	25	26	0

明文: **He is a teacher**

密文: **8 5 0 9 19 1 0 1 0 20 5 1 3 8 5 18**

问题1:如何消除频率特征?　问题2:如何解密?

$$A=\begin{pmatrix}8&5&0&9\\19&0&1&0\\20&5&1&3\\8&5&18&0\end{pmatrix},\qquad \text{密钥 } S=\begin{pmatrix}2&5&7&9\\0&19&1&0\\0&7&20&5\\3&0&0&8\end{pmatrix},$$

密文: $B=AS$　解密: $A=BS^{-1}$

3. 逆矩阵的运算性质

(1) 若 A 可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3) 若 A,B 为同阶方阵且均可逆，则 AB 亦可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证明 $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$

(4) 若A可逆，则A^{T}也可逆，且$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$。

证明 $\because\ A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E,$

$\therefore\ \left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$

(5) 若A可逆，则有$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}.$

证明 $\because\ AA^{-1}=E$ $\therefore\ |A|\left|A^{-1}\right|=1$

因此 $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}.$

二、逆矩阵初步应用

例4 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$,

求矩阵 X 使满足 $AXB=C$.

解 $\because |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0$, $|B|=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=1\neq 0$,

$\therefore$ A^{-1}, B^{-1}都存在.

由 $AXB=C$ $\Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{E}X\underbrace{BB^{-1}}_{E}=A^{-1}CB^{-1}$

$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$.

1. 求解矩阵方程

在方阵A, B可逆的前提下，有下面结论：

（1）若 $AX=B$，则 $X=A^{-1}B$；

（2）若 $XA=B$，则 $X=BA^{-1}$；

（3）若 $AXB=C$，则 $X=A^{-1}CB^{-1}$；

是求解矩阵方程常用的方法.

练习 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

解 在方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$,

得 $\overset{E}{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}} X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ($AX = B$, 则 $X = A^{-1}B$)

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -28 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. 方阵的多项式

多项式函数： $\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$

方阵的多项式: $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\qquad \varphi(x)=x^3-2x+5\qquad \varphi(A)=?$$

$$\varphi(A)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^3-2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\0&4\end{pmatrix}$$

三、小结

1. 逆矩阵的概念

2. 逆矩阵 A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0.$

3. 逆矩阵的计算方法:

(1) 待定元素法;

(2)利用公式 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$; 伴随矩阵法.

4. 逆矩阵的运算性质:

(1) 若 A 可逆,则 A^{-1} 亦可逆,且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

(2) 若 A 可逆,数 $\lambda\neq 0$,则 λA 可逆,且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$

(3) 若 A,B 为同阶方阵且均可逆 ,则 AB 亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

(4) 若 A 可逆,则 A^{T} 亦可逆,且 $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}.$

(5) 若 A 可逆,则有 $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}.$