第4节　矩阵分块法

一、分块矩阵的概念

二、分块矩阵的运算

一、分块矩阵的概念

在矩阵的运算中，常会用若干条横线和纵线把矩阵分成若干块，每一小块叫做矩阵的子块（子矩阵），而每个子块在运算中直接看作是矩阵的元素一样。

这种以子块为元素的形式上的矩阵，就是分块矩阵。

矩阵的分块形式很多，例如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

可以分为

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \hdashline 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

记为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

也可以分为

$$A=\left(\begin{array}{cc:c:c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 0 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

或分为

$$A=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 0 & 3 & 5 & 7 \\ \hdashline 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix}$$

二、分块矩阵的运算

(1) $A+B$：设矩阵 A与B的行数相同，列数相同，对A,B采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij}与B_{ij}的行数相同，列数相同，那末

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

例1

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{array}\right) \qquad B=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$A+B=\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hdashline 6 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$A_{11}+B_{11}=(1\ \ 2)+(1\ \ 1)=(2\ \ 3)$$

作$A+B$运算，要求对A和B的行、列的分法相同.

(2) λA: 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数, 那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

作 λA 运算，对 A 的分法无要求。

(3) AB：设A为$m \times l$矩阵，B为$l \times n$矩阵，分块成

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, r).$

作AB运算，要求对A的列的分法与B的行的分法相同。

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

(5) 分块对角阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 A_i 均为方阵 .

分块对角矩阵的具有下述性质：

(c) 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$， 若 $|A_i| \neq 0 (i=1,2,\cdots,s)$，

则 $|A| \neq 0$， A 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$.

例2 设

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc:ccc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \end{array}\right),$$

求 A^{-1}.

解:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 6 & \\ & & 7 \end{pmatrix} \quad A_4=\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 6 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & & \\ & 1/6 & \\ & & 1/7 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_4^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & A_3^{-1} & \\ & & & A_4^{-1} \end{pmatrix} = \ldots$$