第3章　矩阵的初等变换与线性方程组

第1节　矩阵的初等变换

第2节　矩阵的秩

第3节　线性方程组的解

第1节　矩阵的初等变换

一、初等变换的概念

二、矩阵的秩

三、初等方阵

四、利用初等变换求逆阵

五、小结

线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \xrightarrow{\text{增广矩阵}} (A\ B) \to \overline{A}$$

矩阵形式：$\underline{AX = B}$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

再论解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$

消元法

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 0x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0x_2 = 0 \\ 0x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

增广矩阵

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

一、初等变换的概念

利用消元法求解线性方程组时，常会将：

（1）两个方程位置对调；

（2）一个方程的两边同乘一个非零常数；

（3）一个方程的两边同乘一个非零常数后加到另一个方程上。

这三种变换称为线性方程组的初等变换，线性方程组经过初等变换后其解不变。

从矩阵的角度去看方程组的初等变换，就产生了矩阵的初等变换的概念。

定义1 对矩阵进行以下三种变换，称为矩阵的初等行（列）变换：

（1）对调变换：对调 i，j 两行（列），记作

$$r_i \leftrightarrow r_j \ (c_i \leftrightarrow c_j)$$

（2）数乘变换：第 i 行（列）乘以 k，记作

$$r_i \times k \ (c_i \times k)$$

（3）乘加变换：第 j 行（列）乘以 k 加到第 i 行（列）上，记作

$$r_i + kr_j \ (c_i + kc_j)$$

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换。

定义 若矩阵 A 经过有限次的初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与 B 等价，记作

$$A \sim B \quad （或 A \rightarrow B）$$

例如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = B$

则有 $A \sim B$.

矩阵间等价关系具有下列性质：

（1）自反性：

（2）对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$

（3）传递性：若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$

2. 行阶梯形矩阵、最简形矩阵、标准形

定义2 (1) 一非零矩阵，若满足：

（i）如果有零行，零行都在非零行的下方，且非零行的首非零元所在列下方的元素都为零；

（ii）第 i 行首非零元的列标小于第 $i+1$ 行的首非零元的列标($i \geq 1$),

则称其为行阶梯形矩阵。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形

定义2(2) 每行第一个非零元素为 1，且这些 1 所在列的其它元素都为零的行阶梯形矩阵，称为最简行阶梯形矩阵，简称行最简形矩阵。

例如
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
行最简形矩阵

注1：任意矩阵 A，总可以经过初等行变换化为行阶梯形矩阵及行最简形。

注2: 任意矩阵 A 经过初等行变换化成行最简形是唯一的。

练习 用初等**行变换**将矩阵 A 化成行阶梯形矩阵和行最简形。

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+2r_1]{r_2+3r_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{行阶梯形矩阵}} \xrightarrow[\frac{r_3}{6}]{(-1)r_1 \atop -\frac{r_2}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{行最简形矩阵}}$$

例1 求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 & (3) \end{cases}$

（用矩阵的初等变换）

解

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 + r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

阶梯形矩阵

$$\xrightarrow{r_2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{方程组的解} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

行最简形矩阵

行最简形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 标准形

这个过程具有一般性，由此可得推论：

推论1 任一 m×n 矩阵 A 都等价于如下的矩阵

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

称为A的等价标准形。

推论2 任何非奇异矩阵都可经过有限次的初等行变换化为单位阵。

例如 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&2&8\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&12\end{pmatrix}=B$$ 行阶梯形矩阵

也可以再将 B 一直化为标准型：

$$B\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{12}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

二、初等矩阵

定义3 由单位方阵 E 经过一次初等变换而得到的矩阵称为**初等方阵**。

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+4r_3}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

与三种初等变换对应，就有三种初等矩阵。

1. $r_i \leftrightarrow r_j$ (或 $c_i \leftrightarrow c_j$)

2. kr_i (或 kc_i)

3. $r_i + kr_j$ (或 $c_j + kc_i$)

1. 第一种初等矩阵：$r_i \leftrightarrow r_j$ (或 $c_i \leftrightarrow c_j$)

$$
E(i,j)=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

2. 第二种初等矩阵： kr_i (或 kc_i)

$$
E(i(k))=\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & k & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

3. 第三种初等矩阵：$r_i + kr_j$ (或 $c_j + kc_i$)

$$E(i,j(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列} \quad \text{第 } j \text{ 列} \end{array}$$

例2 设$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\4&-2&5&3\\0&1&2&5\end{pmatrix}$，求 $E(1,3)A$, $AE(1,3)$.

解

$$E(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\4&-2&5&3\\0&1&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2&5\\4&-2&5&3\\1&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$AE(1,3)=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\4&-2&5&3\\0&1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1&-1\\5&-2&4&3\\2&1&0&5\end{pmatrix}$$

性质1： 设 A 为$m\times n$ 矩阵，则

(1) $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E(i,j)A$ $\qquad A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AE(i,j)^{\mathrm{T}}$

(2) $A \xrightarrow{r_i \times k} E(i(k))A$ $\qquad A \xrightarrow{c_i \times k} AE(i(k))^{\mathrm{T}}$

(3) $A \xrightarrow{r_i + kr_j} E(i,j(k))A$ $\qquad A \xrightarrow{c_i + kc_j} AE(i,j(k))^{\mathrm{T}}$

初等矩阵的性质：

（1）初等矩阵的转置仍为初等方阵；

（2）初等矩阵都可逆，其逆阵仍为同种类型的初等矩阵.

$$|E(i,j)| = -1, \qquad E(i,j)^{-1} = E(i,j)$$

$$|E(i(k))| = k, \qquad E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$$

$$|E(i,j(k))| = 1, \qquad E(i,j(k))^{-1} = E(i,j(-k))$$

性质2 矩阵A可逆的充要条件是A可以表示为若干个初等矩阵的乘积，即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_s$$

推论: 矩阵A可逆的充要条件是 $A \overset{r}{\sim} E$.

(矩阵A可逆的充要条件是A经过有限次的初等行变换化为单位矩阵)

证明:"必要性" 因A可逆，所以A可表示为若干个初等矩阵的乘积，即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_t$$

又初等矩阵$P_i (i = 1,2,\cdots,t)$可逆，且其逆矩阵仍是初等矩阵，

所以 $$P_t^{-1} P_{t-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E$$

故 $A \sim E$.

"充分性" 因A经过初等行变换可化为单位阵，即存在初等矩阵

$P_i (i = 1,2,\cdots,t)$，使得 $P_t P_{t-1} \cdots P_1 A = E$，

$$|P_t P_{t-1} \cdots P_1 A| = |P_t| |P_{t-1}| \cdots |P_1| |A| = 1,$$

即$|A| \neq 0$，故A可逆 .

三、利用初等变换求逆阵

由于可逆矩阵 A 可以通过初等行变换化为单位阵，而每进行一次初等行变换相当于在A的左边乘一个相应的初等矩阵，即

$$\text{可逆矩阵 } A \xrightarrow{t\text{ 次初等行变换}} \text{单位矩阵 } E$$

相当于可以找到 t 个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_t$

使得 $$P_t P_{t-1} \cdots P_2 P_1 A = E$$

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{若干次初等行变换}} (E \mid A^{-1})$$

练习： 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

解 $(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2+5r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\times(-1/2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$

四、利用初等变换求解矩阵方程

1. 当 $AX=B$，有 $X=A^{-1}B$，而

$$A^{-1}(A \mid B)=(E \mid A^{-1}B)$$

即 $(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}B)$

2. 当 $XA=B$，有 $X=BA^{-1}$，于是

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初 等 列 变 换}} \begin{pmatrix} E \\ \hline BA^{-1} \end{pmatrix}$$

例3 求矩阵 X,使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$.

$$(A\,\vdots\,B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-2&1&-4\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-2&1&-4\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&1&1&3\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2+5r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \div (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

则 $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

三、小结

1. 三类初等变换

（1）对调变换：$r_i \leftrightarrow r_j$ （$c_i \leftrightarrow c_j$）

（2）数乘变换：$r_i \times k$ （$c_i \times k$）

（3）乘加变换：$r_i + kr_j$ （$c_i + kc_j$）

2. 三类初等矩阵

3. 利用初等变换求逆阵方法

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1})$$

4. 利用初等变换求解矩阵方程方法

$$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}B)$$