第二节　矩阵的秩

一、矩阵的 k 阶子式

二、矩阵的秩的概念

三、求矩阵秩的初等变换法

四、小结

一、 矩阵的 k 阶子式

定义 4 在矩阵 A 中任取 k 行 k 列，位于交叉点的 k^2 个元素按原次序构成的一个 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子行列式，简称 k 阶子式. → k 阶行列式

显然，$k \leq \min\{m, n\}$，且 $m \times n$ 的矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k \times C_n^k$ 个.

当子式的值不为零时，称为非零子式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

与元素a_{12}相对应的余子式

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

相应的代数余子式

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子块

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

二、 矩阵的秩的概念

定义5 矩阵 A 的非零子式的最高阶数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $r(A)=r$ 。

说明:（1）$r(A)\le \min\{m, n\}$;

（2）若 A 有一个 k 阶子式不为零，则 $r(A)\ge k$;

（3）若 A 的所有 $k+1$ 阶子式都为零，则 $r(A)\le k$;

（4）规定零矩阵的秩为零;

（5）矩阵的秩是唯一的;

（6）$r(A)=r(A^T)$ 。

例1 求 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 2\\ 4 & 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$ 的秩。

解 二阶子式 $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0$，而三阶子式

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 4 & 4 & -2\end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 3\end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 4 & -2 & 3\end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 4 & -2 & 3\end{vmatrix}=0$$

全为零，则 $r(A)=2$.

例2 求矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\because$ B是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行，

$\therefore$ B 的所有 4 阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, $\therefore$ $R(B) = 3$.

$$\boxed{\text{行阶梯形矩阵的秩} = \text{非零行的行数}}$$

三、求矩阵秩的初等变换法

定理2　若 $A \sim B$ ，则 $R(A)=R(B)$.

即初等变换不改变矩阵的秩.

由此得到利用初等变换求矩阵秩的方法:

将矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，则行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

例3 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$，求矩阵的秩。

解 对矩阵做初等行变换

$$A \xrightarrow{r_3+2r_1} \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 6 & -3 & 9\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因非零行的行数为2，$\therefore R(A)=2.$

四、小结

1. 矩阵秩的定义

2. 求矩阵秩的方法

（1）利用定义

寻找矩阵的最高非零子式，其阶数即为矩阵的秩。

（2）初等变换法

把矩阵用初等行变换化为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩。