§3 线性方程组的求解

一、线性方程组的表达式

二、线性方程组解的判定

三、小结

一、线性方程组的表达式

1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

3. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 矩阵方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

可简化为 $AX = b$.

二、线性方程组解的判定

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

矩阵形式：$\underline{Ax = b}$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

增广矩阵

$(A\ b)$

系数矩阵　　n 元未知量　　常数项矩阵

（1）$b \neq O$：非齐次线性方程组　　（2）$b = O$：齐次线性方程组

定理3 n 元线性方程组 $Ax=b$

① 无解的充要条件是 $R(A)<R(A,b)$;

② 有惟一解的充必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$;

③ 有无限多解的充要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.

分析: 只需证明条件的充分性，即

- $R(A)<R(A,b) \Rightarrow$ 无解;
- $R(A)=R(A,b)=n \Rightarrow$ 惟一解;
- $R(A)=R(A,b)<n \Rightarrow$ 无穷多解.

✓ 无解 $\Rightarrow R(A)<R(A,b)$;

✓ 唯一解 $\Rightarrow R(A)=R(A,b)=n$;

✓ 无穷多解 $\Rightarrow R(A)=R(A,b)<n$.

若 $R(A)=r$，不妨设 $B=(A,b)$ 的行最简形矩阵为

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$$\boxed{R(A)\le R(A,b)\le R(A)+1}$$

例如

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2, \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3. \end{cases}$$

对增广矩阵B 进行初等行变换有：

$$B=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

行最简形

$R(A)=2\neq R(Ab)=3$，方程组无解.

又如 $\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 & (3) \end{cases}$

对方程组的增广矩阵B=（Ab）进行初等行变换，有

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{行最简形矩阵}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$R(A) = R(Ab) = 3$ 变量的个数， 有惟一解.

例如: $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2 \\ -x_1-5x_2+4x_3=6 \\ 2x_1+4x_2+7x_3=12 \end{cases}$ 对B=（Ab）进行行变换，有

$$B=(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 7 & 12 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 17/2 & 14 \\ 0 & 1 & -5/2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

行最简形

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{17}{2}x_3=14 \\ x_2-\dfrac{5}{2}x_3=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=14-\dfrac{17}{2}x_3 \\ x_2=-4+\dfrac{5}{2}x_3 \end{cases}$$

（其中x_3称为自由变量）

$R(A)=R(Ab)=2$ <变量的个数， 方程组有无限多解.

例1(13) 设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda.\end{cases}$$

判断λ取何值时，此方程组有

(1) 惟一解；

(2) 无解；

(3) 有无限多个解(求其通解).

解：用初等**行变换**将增广矩阵变为**行阶梯形矩阵**:

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-(1+\lambda)r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda) \end{pmatrix} \overset{r_3+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$R(A)=R(B)=3$，有惟一解.
- 当 $\lambda=0$ 时，$R(A)=1$， $R(B)=2$，无解.
- 当 $\lambda=-3$ 时，$R(A)=R(B)=2$，有无限多解.

当 $\lambda=0$ 时，$B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$　$R(A)=1$，$R(B)=2$，

方程组无解.

当 $\lambda=-3$ 时，$B=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$R(A)=R(B)=2$，其通解为:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

定理3 n 元线性方程组 $AX=b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$;

② 有惟一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$;

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.

分析：对于 $AX=0$, 必有 $R(A,0)=R(A)$ ，所以可从 $R(A)$ 判断齐次线性方程组解的情况.

定理4 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的充要条件是

$$R(A)<n\ .$$

定理5 线性方程组 $AX=b$ 有解的充分必要条件是

$$R(A)=R(A,b)\ .$$

定理6 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是

$$R(A)=R(A,B)\ .$$

三、小结