第四章 向量组的线性相关性

第1节　向量组及其线性组合

第2节　向量组的线性相关性

第3节　向量组的秩

第4节　线性方程组的解的结构

第1节 向量组及其线性组合

一、n 维向量和向量组的定义

二、向量组的线性组合与线性表示的概念

一、n 维向量和向量组的定义

定义1 由 n 个数 a_1，a_2，…，a_n 所组成的有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为 **n 维向量**。这 n 个数称为向量的 n 个分量，第 i 个数 a_i 叫做第 i 个分量。

例如 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$

注:（1）一般只讨论实向量（特别说明的除外）.

（2）行向量和列向量总被看作是两个不同的向量.

（3）所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时，都当作列向量.

（4）列向量一般用小写字母 a, b, α, β 等表示，行向量则用 $a^T, b^T, \alpha^T, \beta^T$ 表示.

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2 \cdots a_n)^T$$

称为列向量。

$$\alpha^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为行向量。

向量组： 若干个同维数的列向量（行向量）所组成的集合.

有限向量组

$$A_{34}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$$

结论：含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量叫做 n **维单位坐标向量**.

二、向量组的线性组合与线性表示的概念

定义2 给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$， 对于任何一组实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$， 表达式

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合.

e_1, e_2, e_3的线性组合

$k_1, k_2, \ldots, k_m$称为线性组合系数。

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2 + 7e_3$$

线性组合的系数

定义　给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 和向量 b，如果存在一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$，使得

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$$

则向量 b 是向量组 A 的线性组合，这时称向量 b 能由向量组 A 的线性表示.

思考：$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

向量 b 能由向量组 a_1, a_2, a_3 线性表示?

线性方程组的表达式

1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=5 \\ x_1-x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

2. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 矩阵方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. 向量组线性组合的形式

$$x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

方程组有解？ $\Longleftrightarrow$ 向量 $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是否能用 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 线性表示？

定理1 向量 b 可由向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 线性表示的充要条件是矩阵 $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 的秩等于矩阵 $B=(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ 的秩。

$$b=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}=b$$

向量b 能由向量组 A 线性表示（唯一） $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax=b$ 有解（唯一） $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(A,b)$ $(R(A)=R(A,b)=n)$

例1 设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$

证明向量 b 能由向量组 a_1, a_2, a_3 线性表示，并求出表示式.

解 向量 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示当且仅当$R(A)=R(A, b)$.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为$R(A)=R(A, b)=2$， 所以 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形矩阵对应的方程组为 $\begin{cases}x_1 \qquad +3x_3=2\\ \qquad x_2-2x_3=-1\end{cases}$

通解为 $x=c\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3c+2\\2c-1\\c\end{pmatrix}$

所以 $b=(-3c+2)\,a_1+(2c-1)\,a_2+c\,a_3$.

定义：设有向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 及 B：$b_1, b_2, \ldots, b_l$， 若向量组 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称**向量组 B 能由向量组 A 线性表示**.

定义：若向量组 A 与向量组 B 能互相线性表示，则称这两个**向量组等价**.

小　　结

1. 线性相关的概念；

2. 线性相关的判定：

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)<m$$

$\Longleftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性相关

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)=m$$

$\Longleftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关