第2节 向量组线性相关性

一、向量组线性相关与线性无关的概念

二、向量组线性相关性的判定

引言 两个问题：

问题1： 给定向量组 A，零向量是否可以由向量组 A 线性表示？

问题1′： 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 是否存在解？

解答： 齐次线性方程组 $Ax= 0$ 一定存在解.

事实上，可令 $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$， 则

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m = O$$（零向量）

问题2： 如果零向量可以由向量组 A 线性表示，线性组合的系数 是否不全为零？

问题2′： 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 是否存在非零解？

解答： 齐次线性方程组不一定有非零解，从而线性组合的系数有可能全等于零，也有可能不全等于零.

定义　给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 和向量 b，如果存在实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得

$$b = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_m a_m,$$

则称**向量 b 能由向量组 A 的线性表示**.

定义4　设向量组A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$，且

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_m a_m = 0$$

如果使得上式成立的$k_1, k_2, \ldots, k_m$不全为零，则称向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ **线性相关**；

如果仅当系数 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时，上式才成立，则称向量组A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ **线性无关**.

一、 向量组的线性相关与线性无关概念

定义4 设向量组A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ ， 且

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m = 0$$

如果使得上式成立的$k_1, k_2, \ldots, k_m$不全为零，

则称向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关；

如果仅当系数 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时，上式才成立，

则称向量组A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关.

例如 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 5)^T$

$\alpha_2 = (2, -1, 1, 1)^T$ 满足 $2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$

$\alpha_3 = (4, 3, -1, 11)^T$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性相关的.

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=O$$

$k_1,k_2,\ldots,k_m$ 不全为零时，

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性相关.

$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关.

例：设 $E=\left(e_1,e_2,e_3\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

若 $k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

则 $k_1=k_2=k_3=0$. 线性无关.

注：（1）单独的零向量是线性相关的。

（2）单独的非零向量是线性无关的。

（3）含有零向量的向量组是线性相关的。

齐次线性方程
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的向量表达式为：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = O$

问题： 如何讨论向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关？

考虑 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=O$ ——齐次方程组

其系数矩阵由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 构成.

显然，如果齐次线性方程组只有零解，则系数列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关；

如果齐次线性方程组有非零解，则系数列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关.

向量组 A 线性相关（线性无关） $\Longleftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax=O$ 有非解（只有零解） $\Longleftrightarrow$ $R(A)<n$ $[R(A)=n]$

定理4 对于 m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 构成的向量组，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$，则

$R(A)<m \Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性相关

$R(A)=m \Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性无关

例1 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$,

试讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及 α_1,α_2 的线性相关性。

解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{5}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3 \Rightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

$R(\alpha_1,\alpha_2)=2 \Rightarrow$ 向量组 α_1,α_2 线性无关

练习 判断下列向量组的线性相关性:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}.$$

解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&3\\-1&1&-1\\5&1&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-5&-5\\0&3&3\\0&-9&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$$

$R(A)<m \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{向量组 }\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\text{线性相关}}$

$R(A)=m \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{向量组 }\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\text{线性无关}}$

推论　如果向量组中，向量的个数 m 大于向量维数 n，则向量组一定线性相关。

例如 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

线性相关.

例2 若向量组 α,β,γ 线性无关，证明向量组

$\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$ 也线性无关.

证 设有一组数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha)=O$$

整理得 $(k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma=O$

由于 α,β,γ 线性无关，所以有

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}，其系数行列式为 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$$

于是方程组仅有零解， 即 $k_1=k_2=k_3=0$

所以向量组 $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$ 线性无关.

三、向量组线性关系定理

定理5

（1）如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性相关，

则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n$ 也线性相关.

如 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ 相关性?

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

线性相关.

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

三、向量组线性关系定理

定理5

（1）如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性相关，

则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\dots,\alpha_n$ 也线性相关.

（2）如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\dots,\alpha_n$ 线性无关，

则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 也线性无关.

$$\varepsilon_1=(1,0,0)^T$$
$$\varepsilon_2=(0,1,0)^T$$
$$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$$

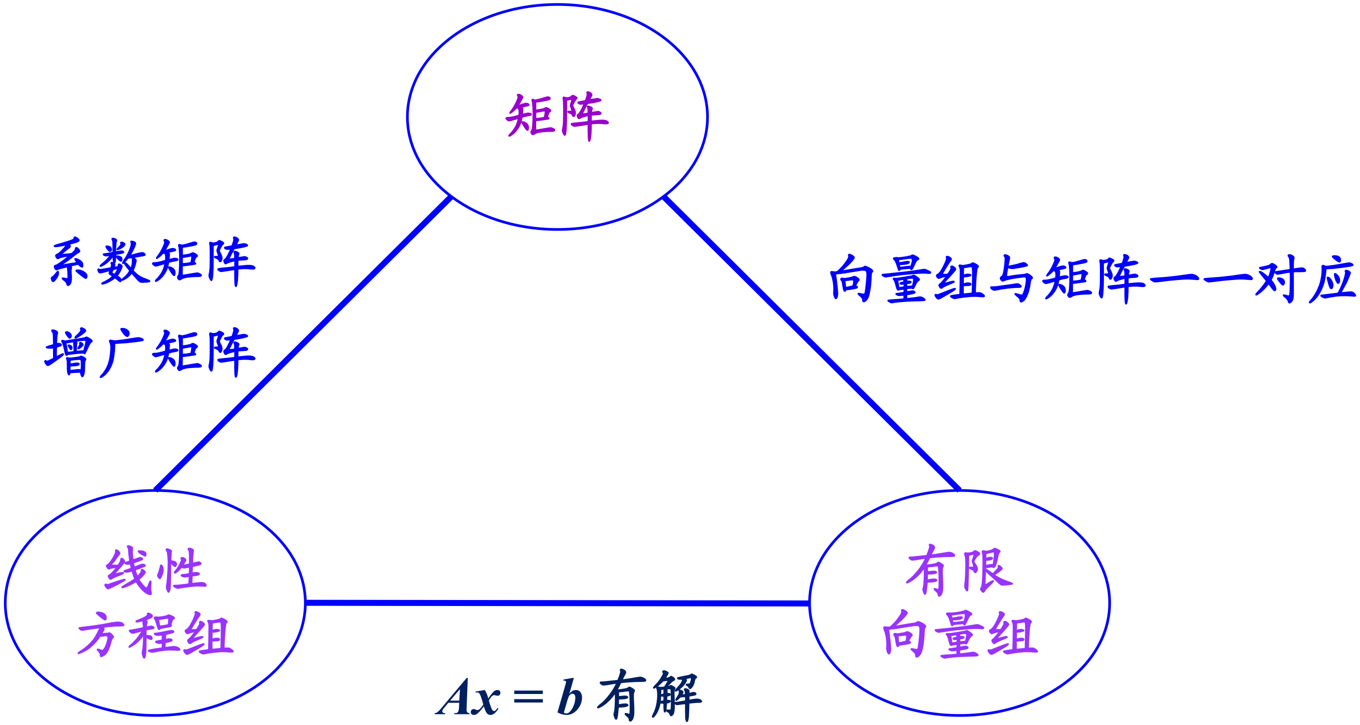
线性无关

注：

- 给定向量组 A，不是线性相关，就是线性无关，两者必居其一.
- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关，通常是指 $m \geq 2$ 的情形.
- 若向量组只包含一个向量：当 a 是零向量时，线性相关；当 a 不是零向量时，线性无关.
- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关，也就是向量组 A 中，至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

特别地，

- a_1, a_2 线性相关当且仅当 a_1, a_2 的分量对应成比例，其几何意义是两向量共线.
- a_1, a_2, a_3 线性相关的几何意义是三个向量共面.



$Ax=b$ 有解

当且仅当

向量 b 可由矩阵 A 的列向量组线性表示

小　　结

1. 线性相关的概念；

2. 线性相关的判定：

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) < m$$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{向量组 } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \text{ 线性相关}}$

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = m$$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{向量组 } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \text{ 线性无关}}$