第5节　向量空间

定义6 设 V 为 n 维向量的集合，如果集合 V 非空，且集合 V 对于加法及数乘两种运算封闭，那么就称集合 V 为向量空间.

所谓封闭，是指在集合 V 中可以进行加法及数乘两种运算，即：

（1）若 $a \in V$，$b \in V$，则 $a + b \in V$；

（2）若 $a \in V$, $\lambda \in R$，则 $\lambda a \in V$.

例如，全体 3 维向量的集合 R^3 就是一个向量空间.

定义7 设 V 为向量空间，如果 r 个向量

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in V$$

且满足

（1） $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关；

（2）V 中任何一个向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表示，

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 称为向量空间 V 的一个基，r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间.

思考：全体 3 维向量构成的集合 R^3 的基是？

是3维空间(立体空间).

几点说明：

1. 如果向量空间 V 没有基，那么 V 的维数为 0;

2. 0 维向量空间只含有一个零向量.

向量空间	$\longrightarrow$	向量组
向量空间的基	$\longrightarrow$	向量组的极大无关组
向量空间的维数	$\longrightarrow$	向量组的秩

例如，(教材例20)

若用 S 表示齐次线性方程组的全体解向量所组成的集合，由齐次线性方程组解向量的性质(性质1及性质2)，有

（1）若 $\xi_1 \in S$，$\xi_2 \in S$，则 $\xi_1 + \xi_2 \in S$；

（2）若 $\xi_1 \in S$，$k \in R$，则 $k\xi_1 \in S$.

这说明集合 S 对向量的线性运算是封闭的，所以集合 S 是一个向量空间，称为齐次线性方程组的解空间.

(参见教材例21)