第五章　相似矩阵及二次型

第1节　向量的内积、长度及正交性

第2节　方阵的特征值与特征向量

第3节　相似矩阵

第4节　对称矩阵的对角化K

第5节　二次型及其标准形

第7节　正定二次型简介K

第1节　向量的内积、长度及正交性

一、内积、长度的定义及性质

二、向量夹角与正交的概念

三、正交向量组

四、向量组的正交化

五、正交矩阵

一、内积、长度的定义及性质

定义1 设 n 维向量

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

称 $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ 为向量 x 与 y 的内积，

记作 $[x,y]=x^{\mathrm{T}}y=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

例 设向量 $a=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，求 $[a,b]$.

注：内积是向量间一种运算.

内积有下列性质(运算律）：

(1) $[x, y] = [y, x]$;

(2) $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$;

(3) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$;

(4) $[x, x] > 0, x \neq 0$; $[x, x] = 0, x = 0$.

柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式：

$$[x, y]^2 \leq [x, x][y, y]$$

$\because [x - ty, x - ty] \geq 0,\ t \in$

$$[x, x] - 2[x, y]t + [y, y]t^2 \geq 0$$

$\therefore [x, y]^2 \leq [x, x][y, y]$

n 维向量的内积是3维向量数量积的一种推广. 3维向量有直观的长度和夹角概念，类似地，利用内积定义 n维向量的长度及夹角。

定义2 称 $\sqrt{[x,x]}$ 为向量 x 的长度，记作 $\|x\|$

即若 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 则 $\|\alpha\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

特别地，当 $\|x\|=1$ 时，称 x为单位向量。

性质：(1) $\|x\|>0, x\neq 0; \|x\|=0, x=0;$

(2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|;$

(3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|;$ 三角不等式

例 设$a=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，试将其单位化.

二、向量夹角与正交的概念

由 $[x,y]^2 \le [x,x][y,y]$ 可得：$-1 < \dfrac{[x,y]}{\|x\|\|y\|} < 1$

设 $\cos\theta = \dfrac{[x,y]}{\|x\|\|y\|}$，$x \ne 0,\ y \ne 0$

称 $\theta = \arccos\dfrac{[x,y]}{\|x\|\|y\|}$，$x \ne 0,\ y \ne 0$

为向量 x与 y的夹角.

若 $\theta = 90^0$，则称向量 x与 y 正交，有时记作 $x \perp y$ 。

$$x \perp y \Leftrightarrow [\,x, y\,] = 0.$$

三、正交向量组

正交向量组：向量组中的向量两两正交.

例如：n 维单位向量组是正交向量组.

定理1 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中不含零向量，且两两正交，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$

$$[x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m,\alpha_j]=x_j[\alpha_j,\ \alpha_j]=0$$

$\therefore\ x_j=0$

注：线性无关向量组不一定是正交向量组.

例1 设在向量空间 R^3 中，

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

求向量 α_3，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交。

解 设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$

解线性方程组 $Ax=0$，则解向量必与 α_1,α_2 都正交，

$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

若取 $\alpha_3=\xi$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交.

定义 3 设 n 维向量 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是向量空间 V 的一个基，若 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是 V 的一个规范正交基 (标准正交基).

问题： 设向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关，能否找出一正交向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$，且使得 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 等价？

结论： 对于任何一个线性无关的向量组，可以导出一个等价的正交向量组.

导出方法：施密特正交化方法.

四、向量组的正交化

1. 施密特 (Schimidt) 正交化步骤:

设向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关，

第1步：令 $b_1 = a_1$;

第2步：$b_2 = a_2 - \dfrac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$;

…… …… ……

第r步：

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1};$$

则 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 是正交向量组，且与向量组

$a_1, a_2, \cdots, a_k \ (1 \le k \le r)$ 等价.

关于向量空间以及基的概念

例如， 全体 3 维向量的集合 R^3 就是一个向量空间，称为三维空间或立体空间.

定义8 设 V 为向量空间，如果 r 个向量

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in V$$

满足

（1） $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关；

（2）V 中任何一个向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表示，

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一个**基，** r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间.

2. 基的标准正交化

设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是向量空间 V 的一个基，求V 的一个标准正交基.

首先，利用施密特正交化过程把 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 正交化为正交向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$

然后，再把 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 单位化，即

$$e_1 = \frac{b_1}{\| b_1 \|}, e_2 = \frac{b_2}{\| b_2 \|}, \cdots, e_r = \frac{b_r}{\| b_r \|}$$

则 $e_1, e_2, \cdots, e_r$是V 的一个标准正交基.

例2 设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$

试用施密特正交化方法将这组向量标准正交化.

解 第一步：正交化，令

$$b_1=a_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}};$$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=(-1,3,1)^{\mathrm{T}}-\frac{4}{6}(1,2,-1)^{\mathrm{T}}=\frac{5}{3}(-1,1,1)^{\mathrm{T}};$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=2(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

再单位化，令

$$e_1 = \frac{b_1}{\| b_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$e_2 = \frac{b_2}{\| b_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}},$$

$$e_3 = \frac{b_3}{\| b_3 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

则 e_1, e_2, e_3 即为所求.

五、正交矩阵

定义4 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$，则称 A 为正交矩阵.

例如，单位矩阵E是正交矩阵.

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

若 $$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}=E$$

有 $$[\alpha_i,\alpha_j]=\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

结论：方阵A为正交矩阵的充要条件是矩阵 A 的列向量组为单位正交向量组.

例3 验证矩阵 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$是正交矩阵.

利用结论： 方阵A为正交矩阵的充要条件是矩阵A的列向量组为单位正交向量组.

方法： 验证A的每个列向量都是单位向量，且两两正交.

关于正交矩阵，有下列性质：

（1）正交矩阵的行列式的值为 1 或 −1；

（2）两个正交矩阵的乘积还是正交矩阵；

（3）正交矩阵的逆阵也是正交矩阵；

（4）正交矩阵的伴随矩阵也是正交矩阵；

（5）正交矩阵的转置矩阵也是正交矩阵.